Zināšanas un radošums, mācoties stereometriju

Ineta Ivanova
Dabaszinātņu maģistra grāds matemātikā
Jāņa Eglīša Preiļu Valsts ģimnāzijas
matemātikas skolotāja

Ir fakti, kuri jāzina, jāizprot.

Ir bezgalīgi daudz uzdevumu, kurus var atrisināt balstoties uz faktiem.

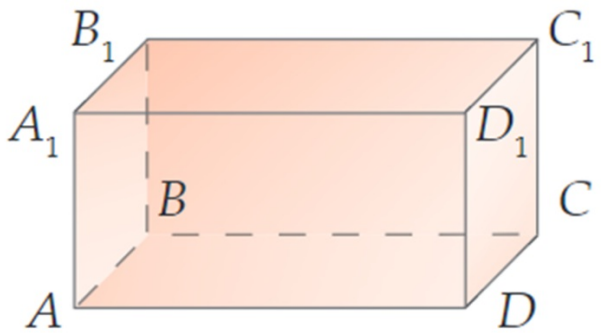
Kas ir minimums, kas jāatceras stereometrijā?

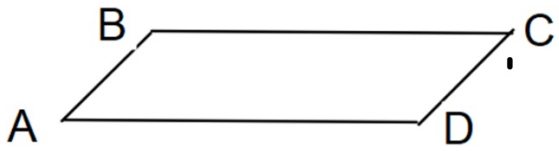
Kā zināt to, kas jāzina?

Kā atcerēties to, kas jāzina?

STEREOMETRIJAS PAMATJĒDZIENI

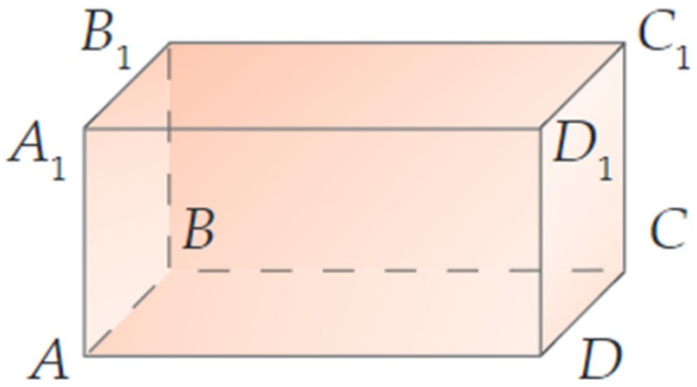
- **punkts**
- **taisne** – caur jebkuriem diviem punktiem var novilkt vienu vienīgu taisni. Taisne sastāv no bezgalīgi daudziem punktiem.
- **Plakne - ?**

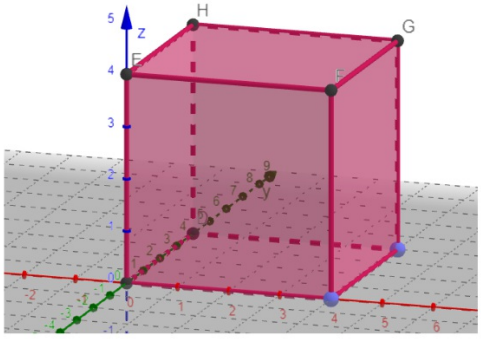




Ko nozīmē stereometrijā:

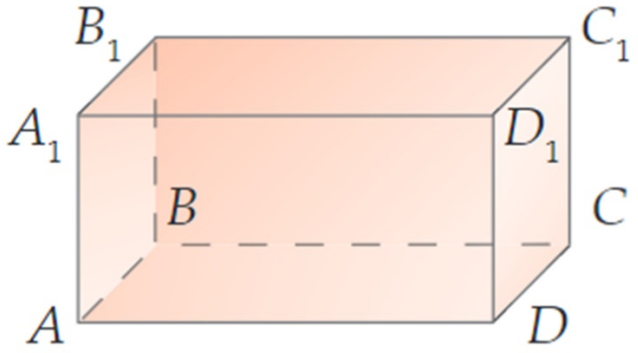
- Caur trīs punktiem var novilkt vienu vienīgu plakni
- Caur divām krustiskām taisnēm var novilkt vienu vienīgu plakni
- Caur divām paralēlām taisnēm telpā var novilkt vienu vienīgu plakni
- Caur taisni un punktu ārpus tās var novilkt vienu vienīgu plakni
- Šķērsas taisnes, to pazīme
- Taisnes un plaknes savstarpējais novietojums

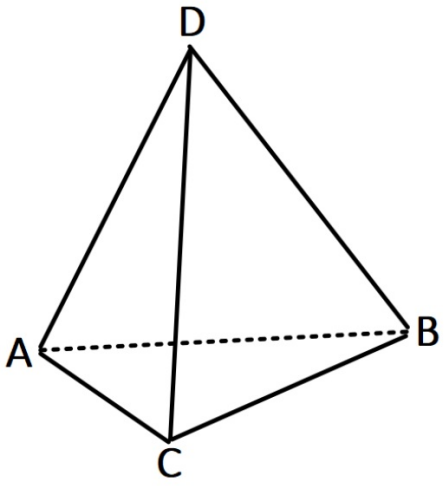




Divu plakņu savstarpējais novietojums telpā

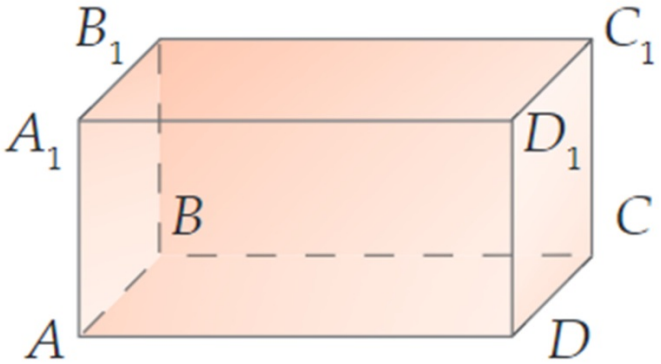
- Divas plaknes var sakrist
- Divas plaknes var šķelties pa taisni, jeb divām plaknēm var būt kopīga viena taisne. Minēto taisni sauc par plakņu šķēluma līniju
- Ja divām plaknēm nav kopīgu punktu, tad plaknes ir paralēlas. Divu plakņu paralelitātes pazīme

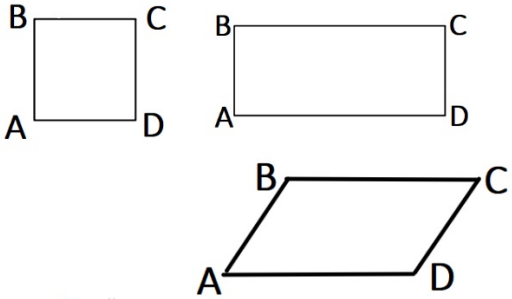


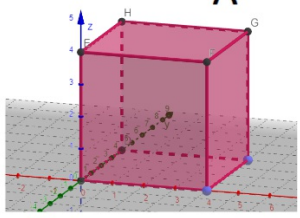


Telpisku figūru attēlošana plaknē. Paralēlā un centrālā projekcija

- **paralēlajā projicēšanā saglabājas:** paralelitāte, nogriežņu garumu attiecība uz paralēlām taisnēm,
- **paralēlajā projicēšanā nesaglabājas:** leņķu lielumi, nogriežņu garumu proporcijas uz neparalēlām taisnēm
- Lai uzzīmētu telpisku ķermeni, vispirms zīmē tā pamatu

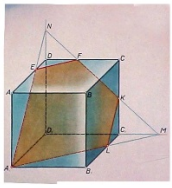


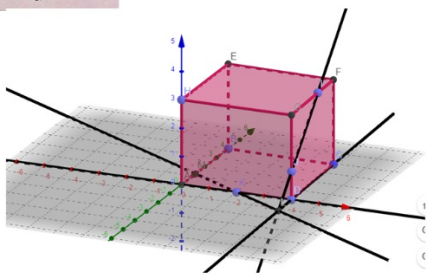




ŠĶĒLUMU KONSTRUĒŠANA

- Ja divas paralēlas plaknes šķeļ trešā plakne, tad šķēluma taisnes ir savstarpēji paralēlas
- Krustojas tikai tās taisnes (krustiskas taisnes), kuras atrodas vienā plaknē
- Šķersu taišnu pazīme
- Kas ir šķēlums





Algoritms

(Par krāsainajiem punktiem nosauksim punktus, kuri pieder šķēlējplaknei.)

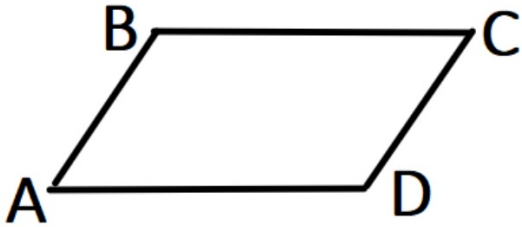
- ***Savieno divus krāsainus punktus, kuri pieder daudzskaldņa vienai skaldnei***
- ***Ja daudzskaldnī ir divas paralēlas skaldnes un vienā no tām doti divi krāsaini punkti (krāsains nogrieznis), bet otrā viens krāsains punkts, tad caur šo vienu krāsaino punktu velkam taisni, kas paralēla krāsainajam nogrieznim. Atzīmējam ar krāsainiem punktiem novilktās taisnes un atbilstošo šķautņu krustpunktus. Atgriežamies uz algoritma sākumu***
- ***Caur vienas skaldnes diviem krāsainiem punktiem velkam vienu taisni, bet <u>caur šis pašas skaldnes šķautni</u> velkam otru taisni. Abu taišņu krustpunktu apzīmējam ar krāsainu punktu. Atgriežamies uz algoritma sākumu***

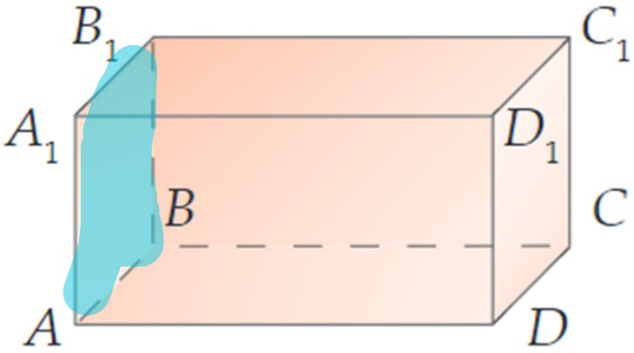
Taisnes un plaknes perpendikularitāte

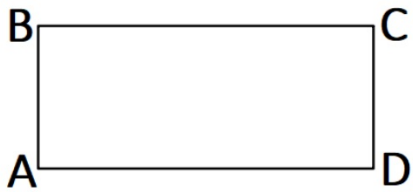
Ja dotā taisne ir perpendikulāra divām krustiskām taisnēm plaknē, tad šī taisne ir perpendikulāra plaknei

Ja pamatā paralelograms, taisnstūris

Vai $A_1D_1 \perp AA_1B_1B$?

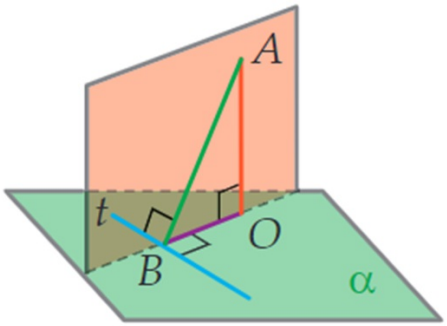


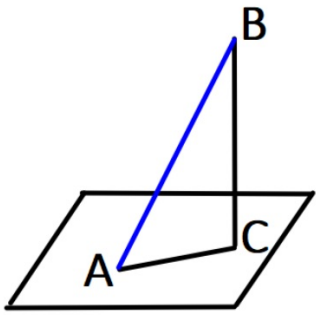


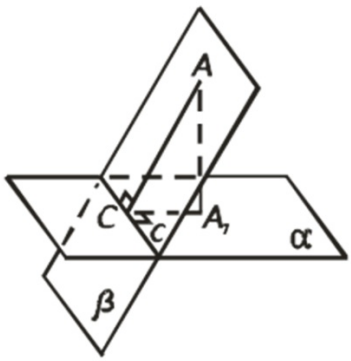


Svarīgi izprast

- ***Perpendikuls pret plakni. Slīpne un slīpnes projekcija***
- Triju perpendikulu teorēma
- Leņķis starp taisni un plakni
- Leņķis starp plaknēm

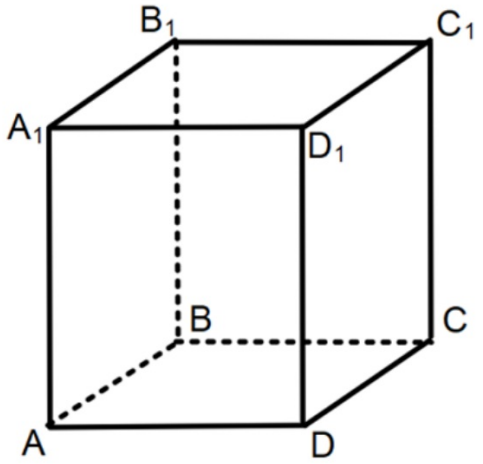


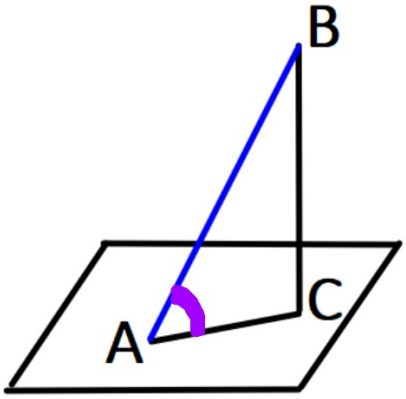




Uzdevumi

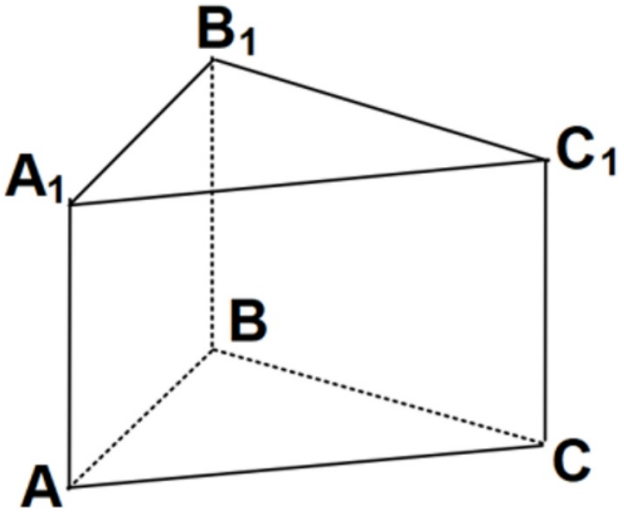
Parādi zīmējumā un aprēķini leņķi ko veido kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ diagonāle B_1D ar sānu skaldni AA_1B_1B.

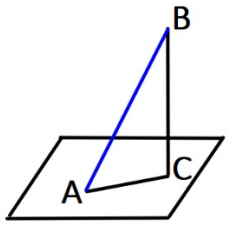


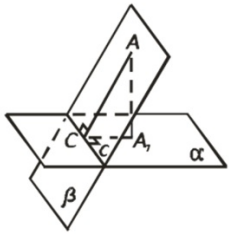


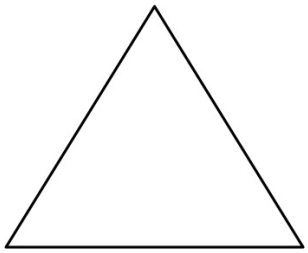
Uzdevumi

Dota regulāra trijstūra prizma $ABCA_1B_1C_1$. Sānu šķautne ir divas reizes garāka par pamata šķautni. **Iezīmē un aprēķini leņķi** ko veido sānu skaldnes AA_1B_1B diagonāle AB_1 ar prizmas sānu skaldni BB_1C_1C.









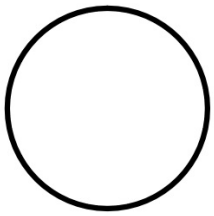
Iezīmē un aprēķini leņķi starp plaknēm ABC un ABC_1

Piramīdas

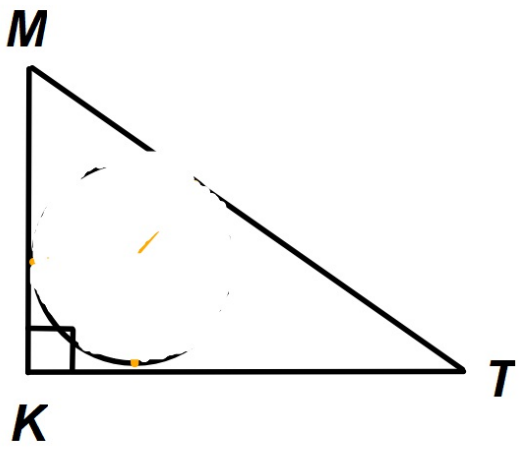
- Piramīda, kuras augstums projicējas pamatam apvilktas riņķa līnijas centrā
- Piramīda, kuras augstums projicējas pamatam ievilktas riņķa līnijas centrā
- Regulāra piramīda
- Piramīda, kuras augstums projicējas pamatam norādītā punktā

SR : Protu konstruēt riņķa līnijas pieskari.

Konstruē pieskari, kura iet caur
1) punktu A;
2) punktu B;
3) punktu C.



Kur atrodas trijstūrī ievilktas riņķa līnijas centrs?

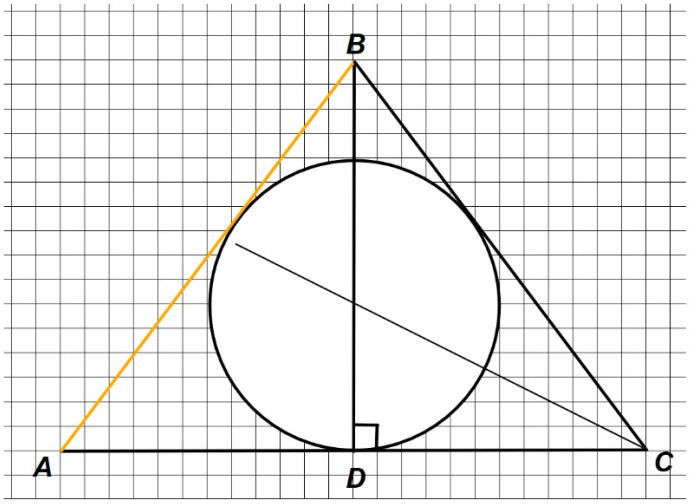


4.uzd. 1) Konstruē taisnleņķa trijstūrī KMT ievilktu riņķa līniju.

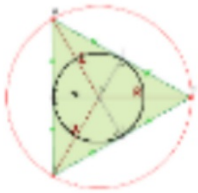
<u>Izcel</u> *rādiusus, kuri perpendikulāri trijstūra malām.*

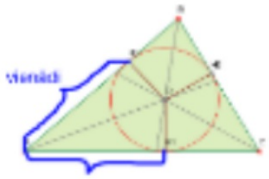
2) Aprēķini trijstūra KMT katešu garumus, ja hipotenūzas MT garums ir 6 cm un ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir 1 cm.

5.uzd. Uzzīmē vienādsānu trijstūri ABC, kura pamats AC = 12 cm, augstums pret pamatu 8 cm. Konstruē trijstūrī ABC ievilktu riņķa līniju. ***<u>Izcel</u>*** *rādiusus, kuri perpendikulāri trijstūra malām. Aprēķini ievilktās riņķa līnijas rādiusu.*



TRIJSTŪRI

DAŽĀDMALU	REGULĀRS	TAISNLEŅĶA
$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$
$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma$	$R=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$	$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin\beta$
$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$	$r=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}$	$R=\frac{a}{2\cdot\sin\alpha}$
$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S}$	$R=2\cdot r$	$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$
$R=\frac{a}{2\cdot\sin\alpha}$		$R=\frac{c}{2}$
$r=\frac{S}{p}$		$r=\frac{a+b-c}{2}$
$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$		Trigonometriskās sakarības
$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$		Pitagora teorēma



Mediānas krustpunktā dalās 2:1

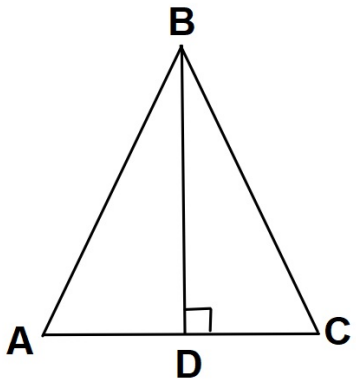
Bisektrises īpašība

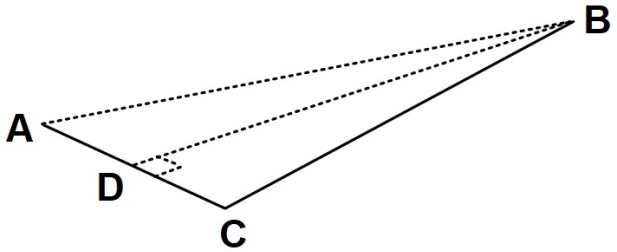
Apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas malu vidusperpendikulu krustpunktā

Ievilktas riņķa līnijas cents atrodas bisektrišu krustpunktā

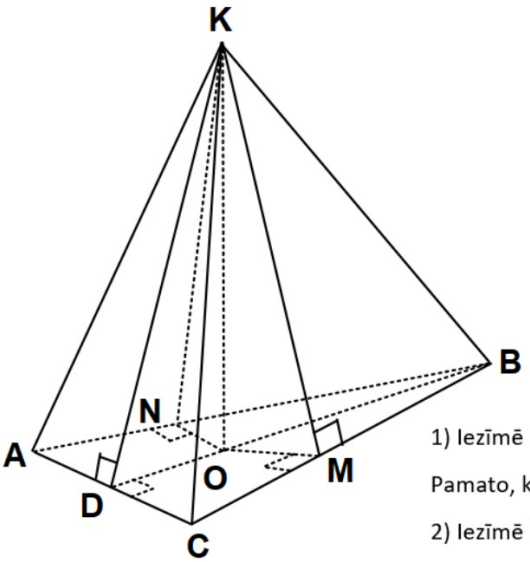
Konspekts par trijstūri. Skolēnam jāpapildina

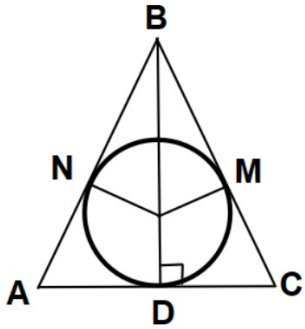
Piramīda, kuras augstuma pamats atrodas pamatā ievilktās riņķa līnijas centrā





Trijstūra piramīdas KABC pamatā ir vienādsānu trijstūris ABC. AB=BC=10 cm, AC=12cm. Piramīdas augstuma pamats atrodas piramīdas pamata trijstūrim ABC ievilktās riņķa līnijas centrā. Piramīdas augstums 4 cm.





1) Iezīmē leņķi ko piramīdas pamata skaldne veido ar sānu skaldni CKB.

Pamato, ka esi pareizi iezīmējis šo leņķi. Aprēķini šo leņķi.

2) Iezīmē leņķi ko piramīdas pamata skaldne veido ar sānu skaldni ABK.

Pamato, ka esi pareizi iezīmējis šo leņķi. Aprēķini šo leņķi.

3) Iezīmē leņķi ko piramīdas pamata skaldne veido ar sānu skaldni AKC.

Pamato, ka esi pareizi iezīmējis šo leņķi. Aprēķini šo leņķi.

4) Aprēķini piramīdas divplakņu kakta leņķus pie pamata.

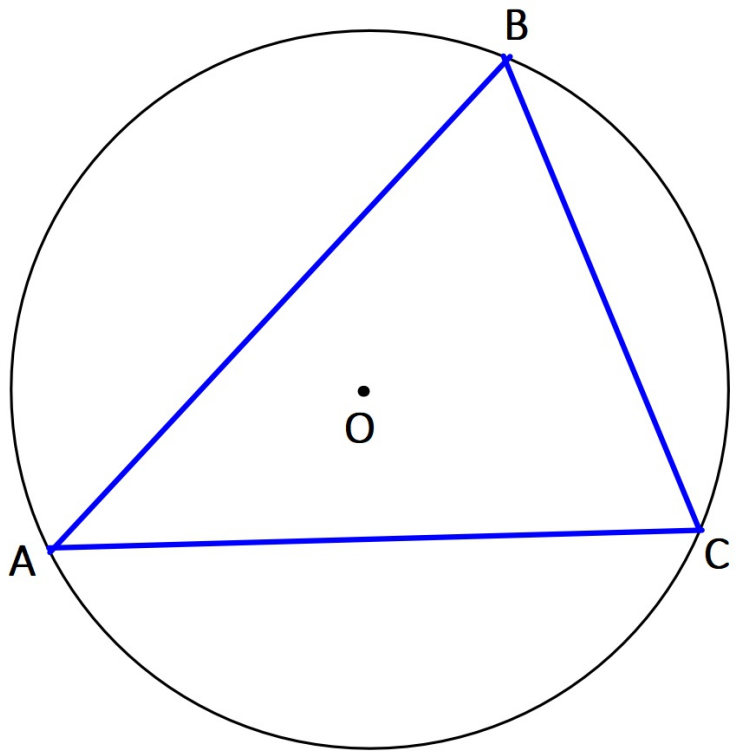
5) Izproti, kas ir piramīdas apotēma. Aprēķini apotēmas garumu.

6) Aprēķini piramīdas sānu virsmas laukumu. Izproti un izmanto divas formulas (ir formulu lapā).

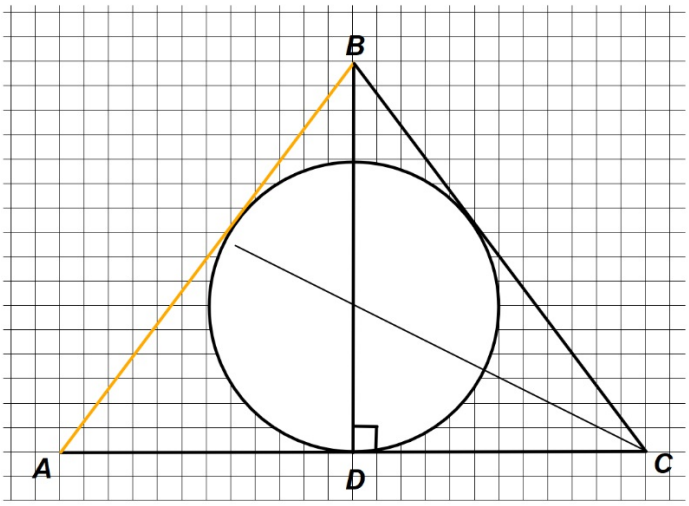
7) Aprēķini piramīdas pilnas virsmas laukumu.

8) Aprēķini piramīdas tilpumu.

Trijstūrim apvilkta riņķa līnija



Uzzīmē vienādsānu trijstūri ABC, kura pamats AC=12 cm, augstums pret pamatu 8 cm. Konstruē trijstūrim ABC apvilktu riņķa līniju. Izcel rādiusus. Aprēķini apvilktās riņķa līnijas rādiusu.



$R = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

Piramīda, kuras augstuma pamats atrodas pamatam apvilktās riņķa līnijas centrā

Uzzīmē piramīdu, kuras pamats ir vienādsānu trijstūris ABC, kuram AC = 12 cm, AB=BC= 10 cm. Piramīdas augstuma pamats atrodas trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrā. Piramīdas augstums ir 4 cm.

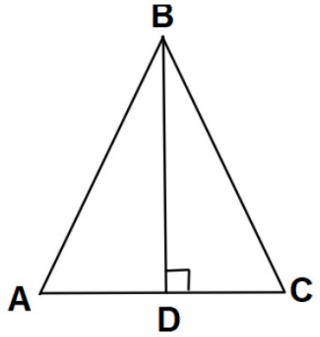
1)Aprēķini piramīdas sānu šķautņu garumus;

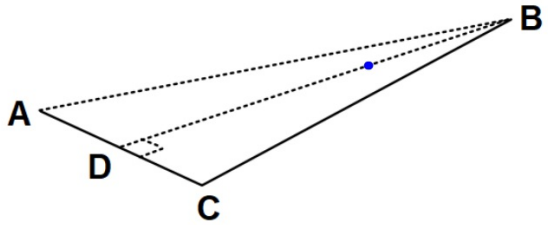
2) Aprēķini leņķus ko sānu šķautnes veido ar pamata plakni;

3) aprēķini piramīdas tilpumu;

4) aprēķini piramīdas sānu virsma slaukumu;

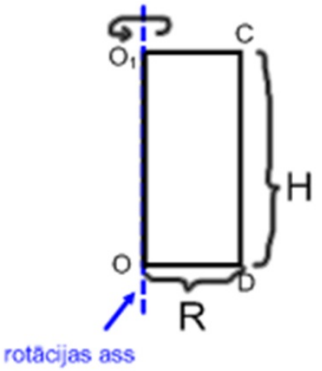
5) vai divplakņu kakta leņķi pie pamata šajā piramīdā ir vienādi? Pamato savus spriedumus.



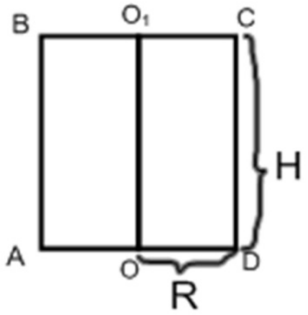


Rotācijas ķermeņi

Cilindrs



taisnstūris, kurš rotē ap vienu no savām malām un veidojas cilindrs



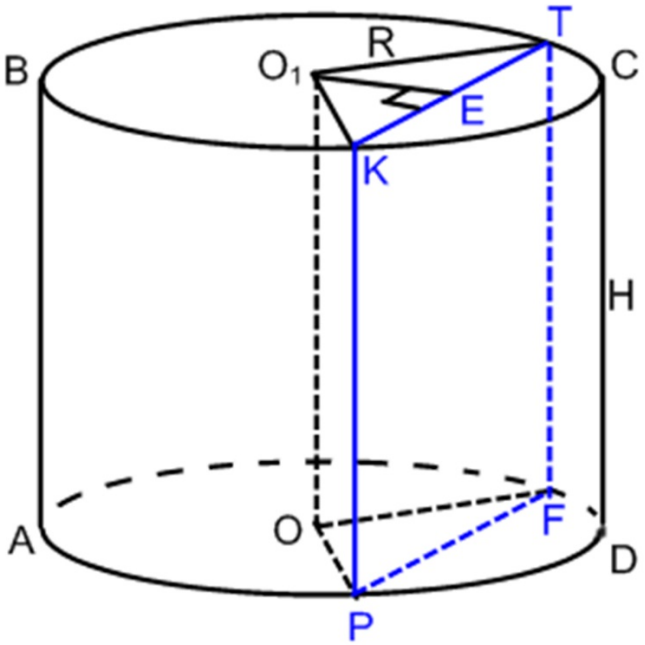
cilindra aksiālšķēlums

cilindra aksiālšķēluma laukums $S = 2R \cdot H$

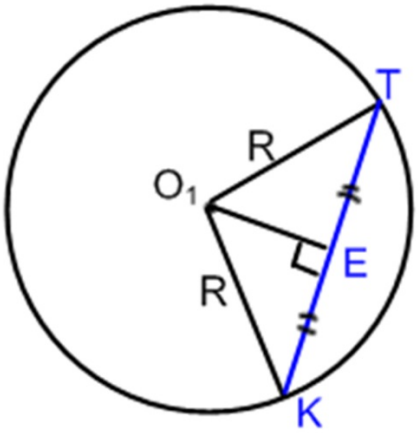
cilindra pamata riņķa līnijas garums

cilindra sānu virsmas laukums $S = 2\pi R \cdot H$

cilindra pilnas virsmas laukums $S = 2 \cdot S_{pam} + S_{sānu} = 2 \cdot \pi R^2 + 2\pi RH$



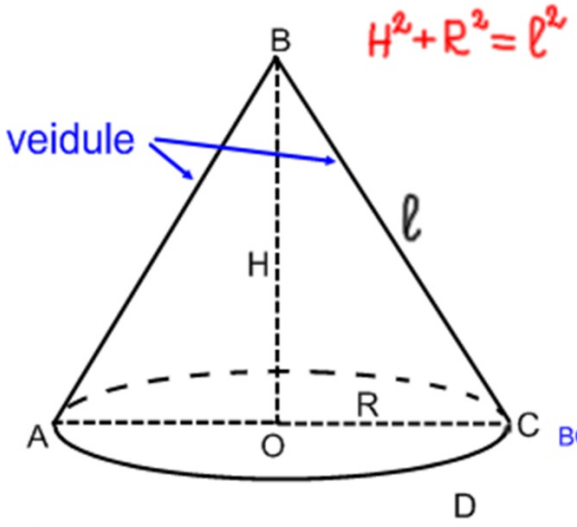
trijstūris KO_1T - vienādsānu



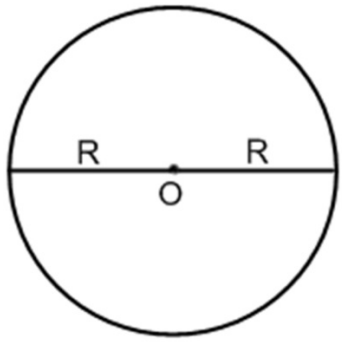
PKTF - cilindra šķēlums ar plakni, kura perpendikulāra cilindra pamatam

O_1E - attālums no plaknes PKTF līdz cilindra rotācija sasij

Konuss



$$H^2 + R^2 = \ell^2$$



ABC - konusa aksiālšķēlums

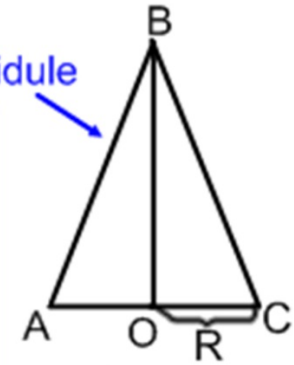
BC - veidule, kuru pieņemts apzīmēt ar mazo burtu ℓ

trijstūris ABC - vienādsānu

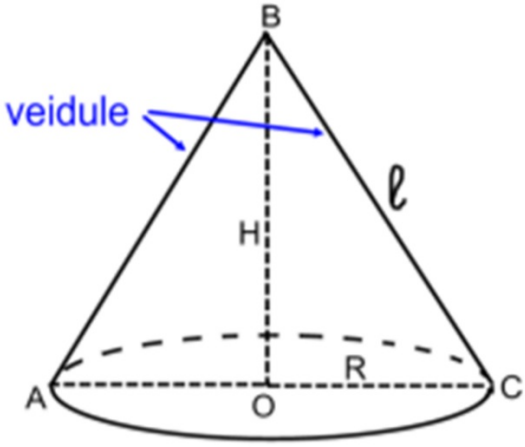
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{pam} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

taisnleņķa trijstūris, kurš rotē ap vienu no savām katetēm un veidojas konuss

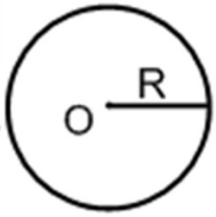
veidule

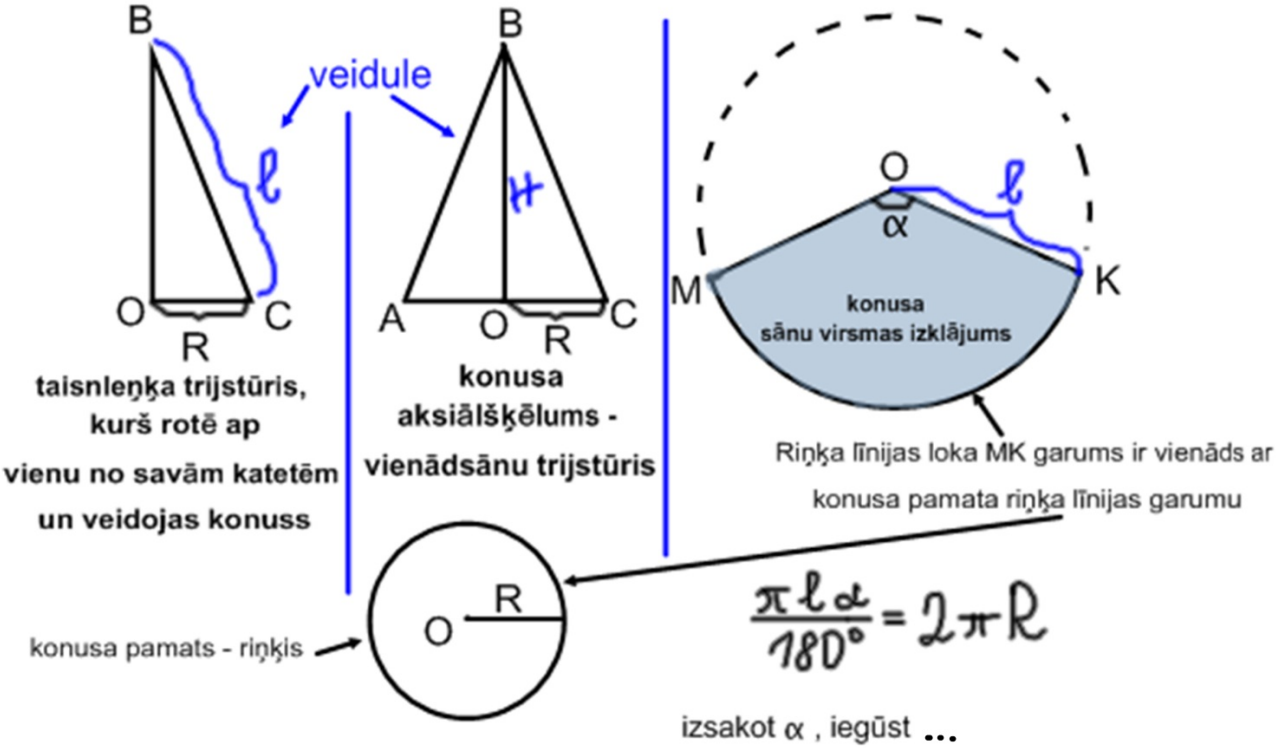


konusa aksiālšķēlums - vienādsānu trijstūris



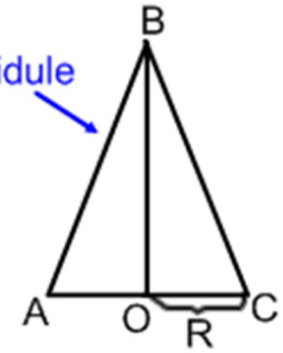
konusa pamats - riņķis



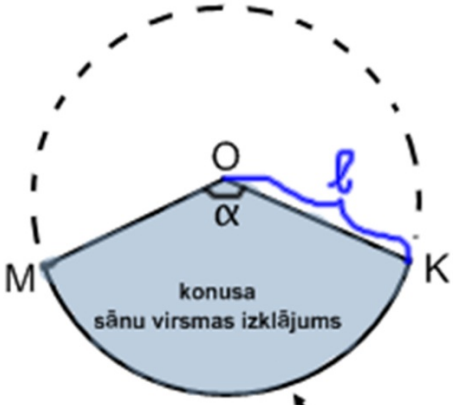

B
veidule
B
ℓ
H
O
C
A
O
C
R
R
taisnleņķa trijstūris,
kurš rotē ap
vienu no savām katetēm
un veidojas konuss
konusa
aksiālšķēlums -
vienādsānu trijstūris
O
ℓ
α
M
K
konusa
sānu virsmas izklājums
Riņķa līnijas loka MK garums ir vienāds ar
konusa pamata riņķa līnijas garumu
R
O
konusa pamats - riņķis
$\frac{\pi \ell \alpha}{180^\circ} = 2\pi R$
izsakot α , iegūst ...

taisnleņķa trijstūris, kurš rotē ap vienu no savām katetēm un veidojas konuss

veidule

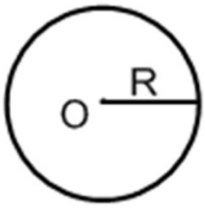


konusa aksiālšķēlums - vienādsānu trijstūris



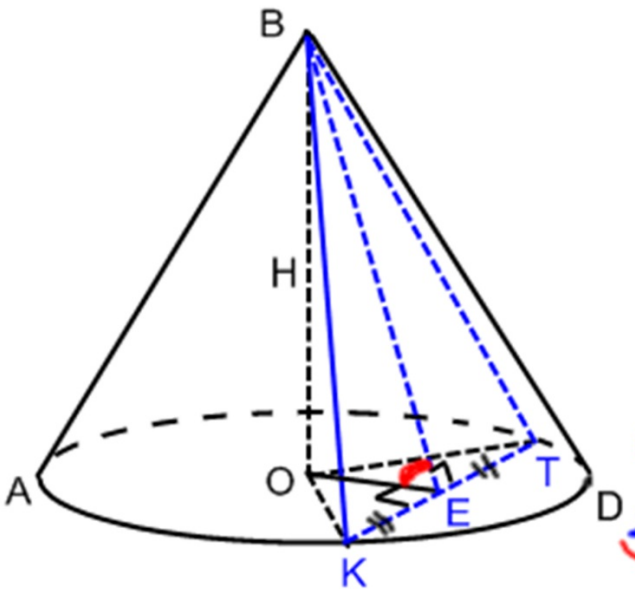
Riņķa sektora laukums ir vienāds ar konusa sānu virsmas laukumu

konusa pamats - riņķis

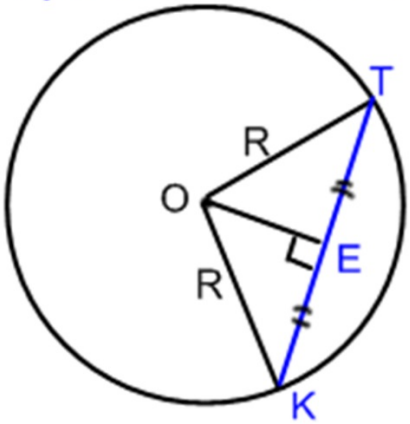


$$S_{sānu} = \frac{\pi \ell^2 \alpha}{360^\circ}$$

ievietojot α , vietā $\alpha = \frac{360^\circ \cdot R}{\ell}$ iegūst ...



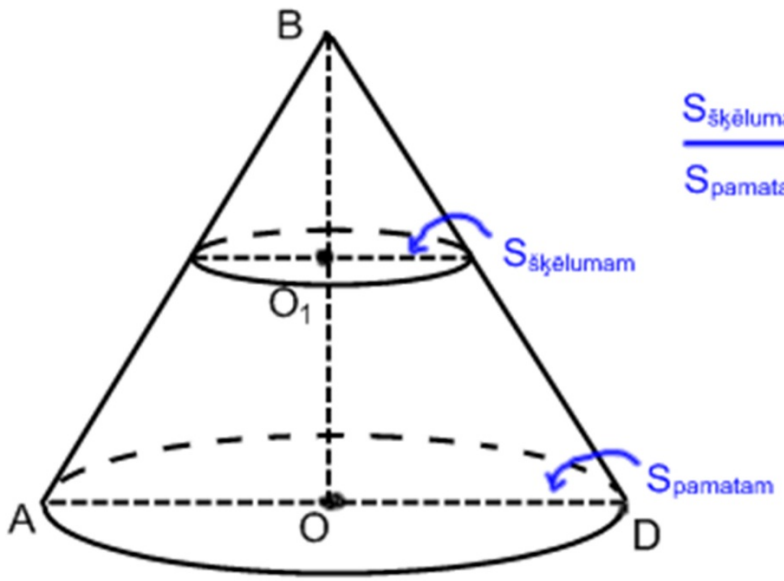
trijstūris KOT - vienādsānu



BTK - konusa šķēlums ar plakni, kura iet caur konusa virsotni un pamata hordu

∢OEB - leņķis ko veido plakne BTK ar pamata plakni

Pamatam paralēlā šķēluma īpašība (līdzīgi kā piramīdai)

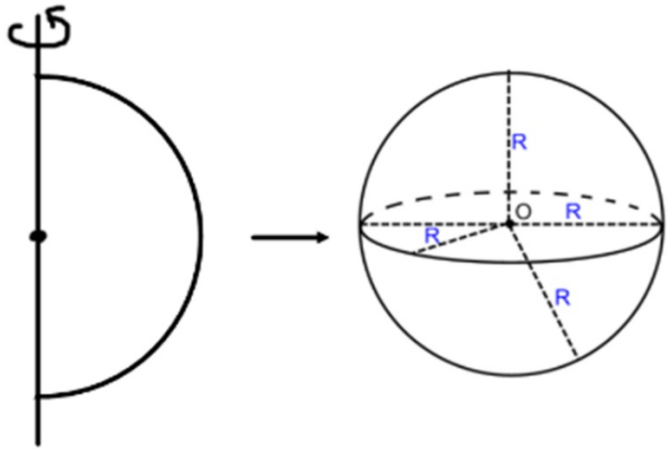


$$\frac{S_{šķēlumam}}{S_{pamatam}} = \frac{BO_1^2}{BO^2}$$

Lode

Lode ir rotācijas ķermenis, kas izveidojas, pusriņķim rotējot ap asi, uz kuras atrodas pusriņķa diametrs

Sfēra ir lodes virsma

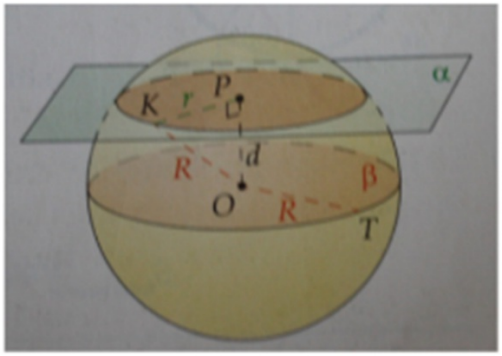


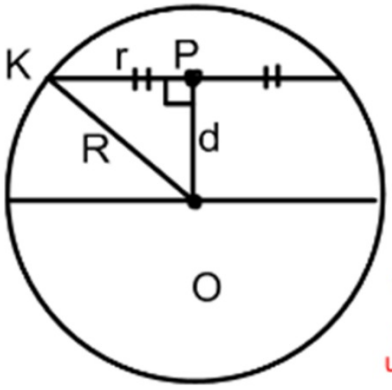
$$V_{lodei} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$S_{sf.virsma} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

R - lodes rādiuss

Lai atrisinātu uzdevumu, var nezīmēt pilnu lodi, bet tikai aksiālšķēlumu





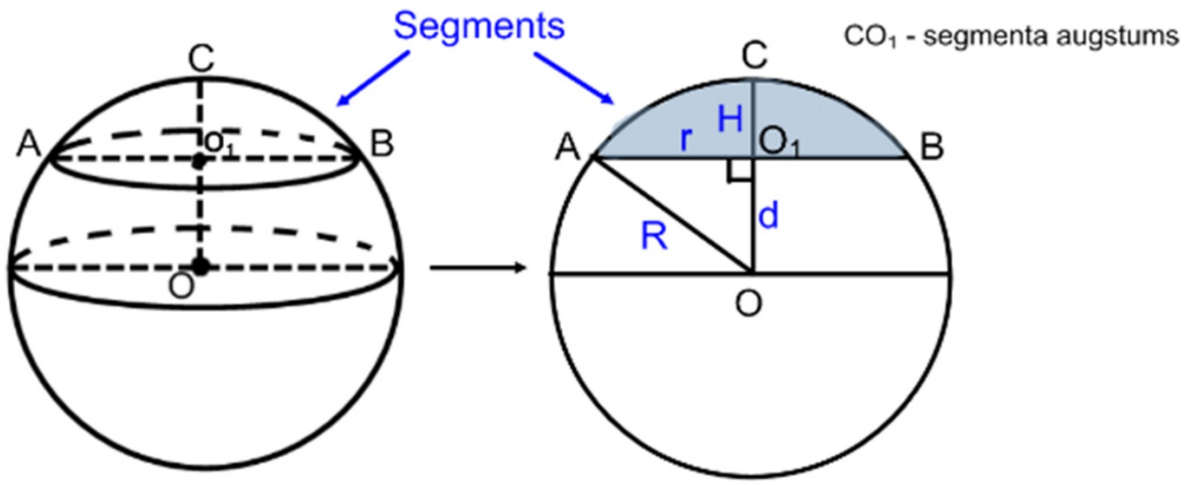
svarīgi izprast un atcerēties šo zīmējumu

R - lodes rādiuss

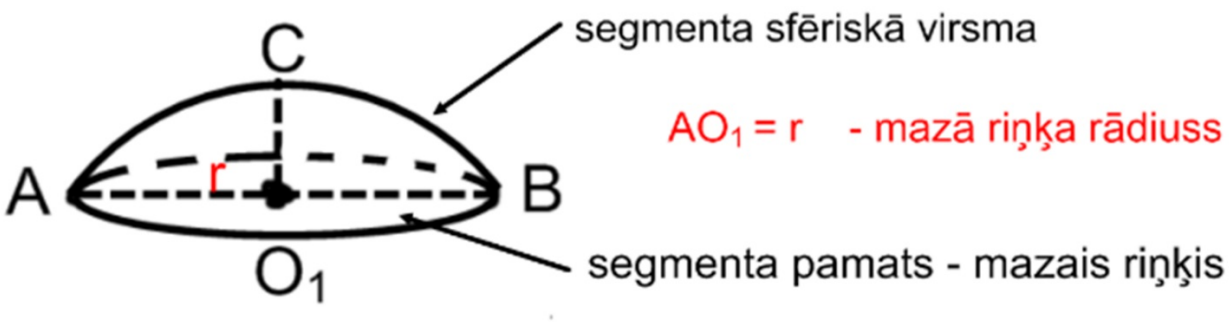
r - mazā riņķa rādiuss

d - attālums no mazā riņķa plaknes līdz lodes centram

$$R^2 = r^2 + d^2$$



Uzmanību! Formulu lapā formulās **H ir atbilstošā segmenta augstums**, **R - lodes rādiuss**. Nesajaukt AO_1 = **r (mazā riņķa)** ar AO = **R (lielā riņķa)**



$S_{sf.\ segm.\ virsma} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

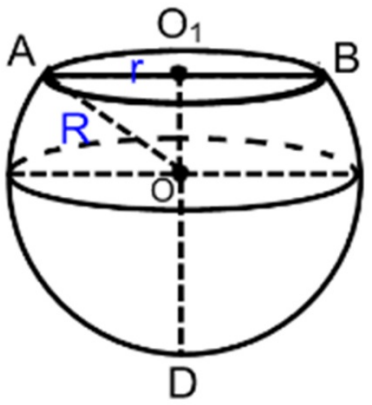
$V_{segmentam} = \pi \cdot H^2 \cdot (R - \frac{H}{3})$

$S_{segmenta\ pilnas\ virsmas} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + \pi\ AO_1^2$

R - lodes rādiuss (lielā riņķa),

H - segmenta augstums, $H = CO_1$

segments



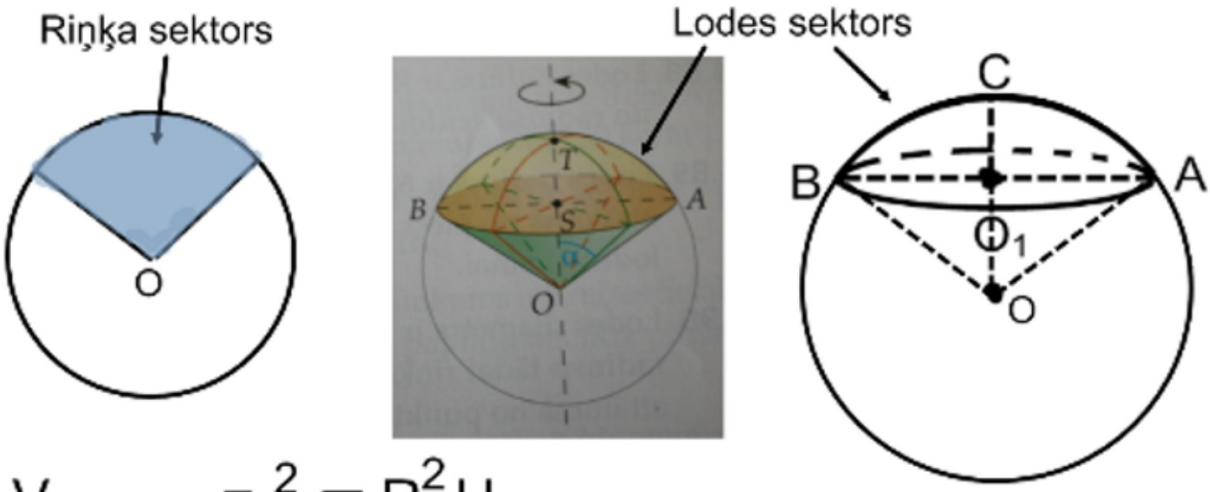
$DO_1 = H$ - segmenta augstums,

$AO = R$ lodes rādiuss

$S_{sf.\ segm.\ virsma} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

$V_{segmentam} = \pi \cdot H^2 \cdot (R - \frac{H}{3})$

$AO_1 = r$ mazā riņķa rādiuss



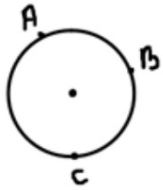
$$V_{sektoram} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Svarīgi! H = CO_1 - atbilstošā segmenta augstums, R = BO -lodes rādiuss

Lodes sektors sastāv no lodes segmenta un konusa, kuru pamati salikti kopā
O – konusa virsotne

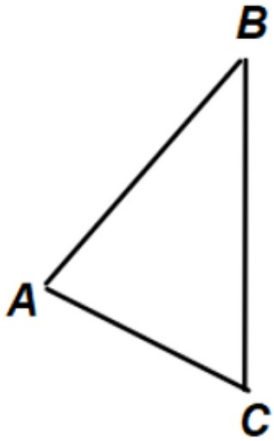
Darba lapa:

<u>SR: Protu konstruēt riņķa līnijas pieskari</u>.



1.uzd. Konstruē pieskari, kura iet caur
1) punktu A;
2) punktu B;
3) punktu C.

1.uzd. Pabeidz teikumu. Trijstūrī ievilktas riņķa līnijas centrs atrodas ...



<u>SR: Zinu kur atrodas daudzstūrī ievilktas riņķa līnijas centrs un protu konstruēt trijstūrī ievilktu riņķa līniju</u>

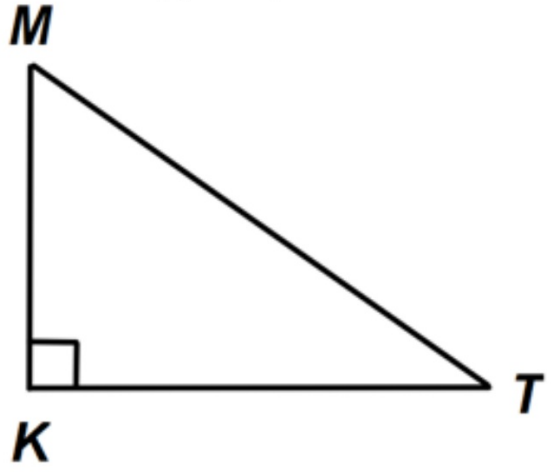
2.uzd. Konstruē trijstūrī ABC ievilktas riņķa līnijas centru.

<u>Izcel</u> rādiusus, kuri perpendikulāri trijstūra malām.

3.uzd. 1) Konstruē taisnleņķa trijstūrī KMT ievilktas riņķa līnijas centru.

Izcel nepieciešamos rādiusus.

2) Aprēķini trijstūra KMT katešu garumus, ja hipotenūzas MT garums ir 6 cm un ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir 1 cm.



4.uzd. Uzzīmē vienādsānu trijstūri ABC, kura pamats AC = 12 cm, augstums pret pamatu 8 cm. Konstruē trijstūrī ABC ievilktu riņķa līniju. **Izcel** rādiusus, kuri perpendikulāri trijstūra malām. Aprēķini ievilktās riņķa līnijas rādiusu.

5.uzd. Trijstūra piramīdas pamatā ir vienādsānu trijstūris ABC. AB=BC=10 cm, AC=12cm. Piramīdas augstuma pamats atrodas piramīdas pamata trijstūrim ABC ievilktās riņķa līnijas centrā. Piramīdas augstums 4 cm.

1) Iezīmē leņķi ko piramīdas pamata skaldne veido ar sānu skaldni CKB.

Pamato, ka esi pareizi iezīmējis šo leņķi. Aprēķini šo leņķi.

2) Iezīmē leņķi ko piramīdas pamata skaldne veido ar sānu skaldni ABK.

Pamato, ka esi pareizi iezīmējis šo leņķi. Aprēķini šo leņķi.

3) Iezīmē leņķi ko piramīdas pamata skaldne veido ar sānu skaldni AKC.

Pamato, ka esi pareizi iezīmējis šo leņķi. Aprēķini šo leņķi.

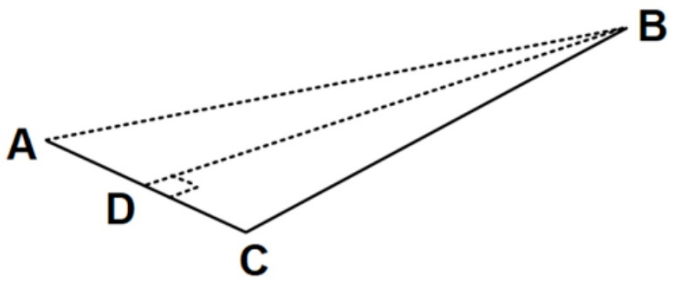
4) Aprēķini piramīdas divplakņu kakta leņķus pie pamata.

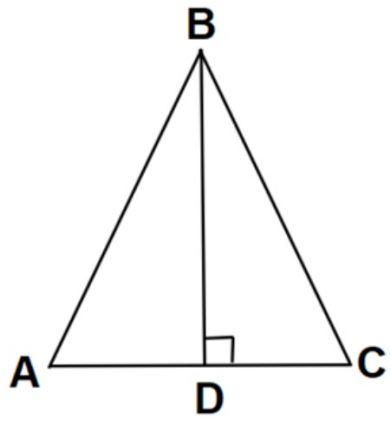
5) Izproti, kas ir piramīdas apotēma. Aprēķini apotēmas garumu.

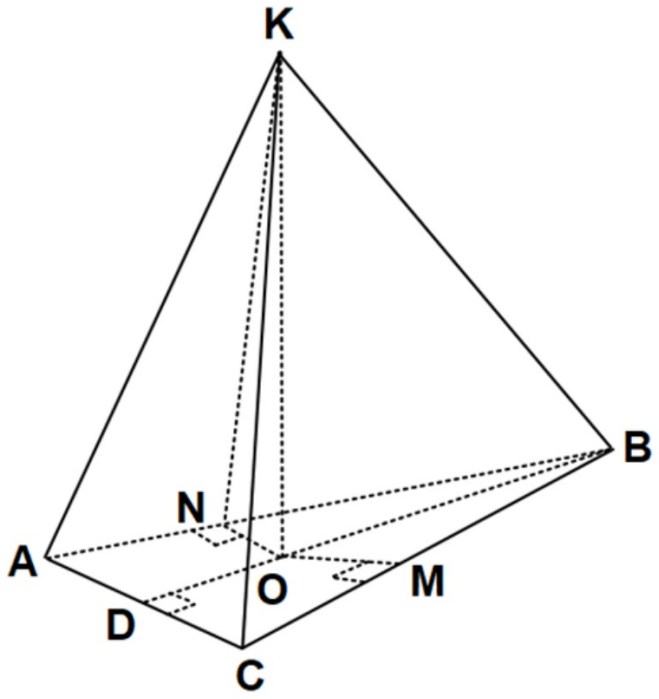
6) Aprēķini piramīdas sānu virsmas laukumu. Izproti un izmanto divas formulas (ir formulu lapā).

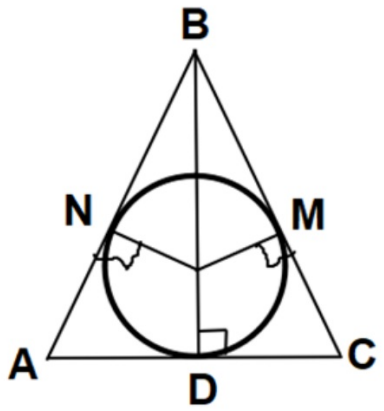
7) Aprēķini piramīdas pilnas virsmas laukumu.

8) Aprēķini piramīdas tilpumu.


B
A
D
C


B
A
C
D


K
B
N
A
O
M
D
C

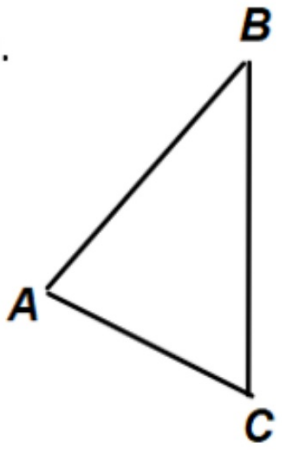

B
N
M
A
C
D

SR: Zinu kur atrodas daudzstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs un protu konstruēt trijstūrim apvilktu riņķa līniju, Protu aprēķināt trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

1.uzd. Pabeidz teikumu. Trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas ...

2.uzd. Konstruē trijstūrīim ABC apvilktu riņķa līniju.

Izcel "īpašos" rādiusus



4.uzd. Uzzīmē vienādsānu trijstūri ABC, kura pamats AC = 6 cm, augstums pret pamatu 4 cm. Konstruē trijstūrim ABC apvilktu riņķa līniju. **Izcel** īpašos rādiusus. Aprēķini apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

5.uzd. Uzzīmē vienādsānu trijstūri ABC, kura pamats AC = 6 cm, augstums pret pamatu 2 cm. Konstruē trijstūrim ABC apvilktu riņķa līniju. **Izcel** īpašos rādiusus. Aprēķini apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

6.uzd. Uzzīmē piramīdu, kuras pamats ir vienādsānu trijstūris ABC, kuram AC = 6 cm, AB=BC= 5 cm. Piramīdas augstuma pamats atrodas trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrā. Piramīdas augstums ir 4 cm. 1)Aprēķini piramīdas sānu šķautņu garumus; 2) Aprēķini leņķus ko sānu šķautnes veido ar pamata plakni; 3) aprēķini piramīdas tilpumu; 4) aprēķini piramīdas sānu virsma slaukumu; 5) vai divplakņu kakta leņķi pie pamata šajā piramīdā ir vienādi? Pamato savus spriedumus.

Apgūstot jaunu mācību tēmu matemātikā, skolēnam ir jāiepazīst jauni jēdzieni, jāatceras, jāizprot daudzas formulas, fakti. Bieži vien grūti atcerēties to, kas ir jāzina. Skolēniem ir jāpierod mācīties radoši. Jāatrod sev piemērots veids, kā apgūto vielu neaizmirst vai atrast formulu lapā.

Skolēnam ir interesantāk risināt uzdevumus, kad viņš zina, kas jāzina. Viņam ir cerība tikt galā ar problēmām, ieguldot savu radošumu. Skolēns jūtas drošāk, kad redz to faktu apjomu, kas viņam jāzina , lai apgūtu to vai citu tēmu. Uzskatu, ka teorijas nezināšana kavē radošuma attīstīšanu skolēnos. Zinot visus likumus, ir interesanti, brīvi risināt uzdevumus. Matemātika var kļūt aizraujoša – varam brīvi izpausties savā uzdevumu risināšanā. Konspektu veidošana un radoša uzdevumu risināšana attīsta arī pētnieciskās darbības prasmes. Uzskatu, ka īpaša uzmanība jāpievērš radošai teorijas apgūšanai, jo zināšanas nodrošina skolēniem komfortablu sajūtu matemātikā